Rozšíření MA1
Domácí úkol 1b. - lineární algebra 2 (lineární zobrazení, vlastní čísla a vlastní vektory matice) .

---

1. Rozhodněte (a odůvodněte), zda jsou následující zobrazení lineární:

   a) $K: R^2 \to R^3$, $K(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ 3x_1 - 2x_2)$;

   b) $P: R^3 \to R^3$, $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 + 2x_2 - 1,\ x_1 - x_2)$;

   c) $S: R^3 \to R^4$, $S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Jsou-li V, W vektorové (lineární) prostory, pak zobrazení $L : V \to W$ je zobrazení lineární, když platí:

(1) $\forall\, v_1, v_2 \in V$: $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$

(2) $\forall\, c \in R\ \forall v \in V$: $L(cv) = c\,L(v)$.

Máme-li rozhodnout, zda dané zobrazení $L : V \to W$ je lineární, „musíme" ukázat (nebo vyvrátit) platnost vlastností (1) a (2).
Jako pomoc lze využít jistě:

1) nutnou podmínku linearity zobrazení : $L(\vec{o}) = \vec{o}$; tedy, pokud $L(\vec{o}) \neq \vec{o}$, zobrazení $L : V \to W$ není lineární;

2) je-li $L : R^n \to R^m$ lineární zobrazení, pak existuje matice A typu (m,n) taková, že $L(v) = A.v$ (při daných bázích v prostorech R^n a R^m je A jediná)

<u>Řešení příkladů:</u>

a) „napíšeme" vzor i obraz zobrazení <u>$K : R^2 \to R^3$</u> jako sloupcové vektory:

$$K\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$ a tedy vidíme, že $$K\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

tedy (podle „rady" 2) je zobrazení $K : R^2 \to R^3$ lineární.

b) $\underline{P: R^3 \to R^3}$, $P(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2-x_3, 3x_1+2x_2-1, x_1-x_2)$;
zkusme zde „ověřit" nutnou podmínku linearity zobrazení, tj.
$P(0,0,0) = 0$;
ale zde je $P(0,0,0) = (0,-1,0) \neq (0,0,0) \Rightarrow$ zobrazení P není zobrazení lineární.

c) $\underline{S: R^3 \to R^4}$ je dáno

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

tedy S je lineární zobrazení – vlastnosti (1) i (2) plynou z pravidel násobení matice a vektoru.
(Obraz vektoru $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ při zobrazení S je dán součinem matice a vektoru, tedy lze užít „radu" 2).)

Poznámka: Ukažme si, že se vyplatí „znát" radu 2), ověření linearity zobrazení $L: R^n \to R^m$ pomocí vlastností (1) a (2) je mnohem delší, dá více práce:

„vlastnost" (2) („vlastnost" (1) bude na další stránce)

$c \in R$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (opět píšeme vektory „sloupcově"), pak

$$K\left(c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = K\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2cx_1 + cx_2 \\ cx_1 - cx_2 \\ 3cx_1 - 2cx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(2x_1+x_2) \\ c(x_1-x_2) \\ c(3x_1-2x_2) \end{pmatrix} \overset{\text{pravidlo násobení vektoru konstantou}}{=}$$

$$= c\begin{pmatrix} 2x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \\ 3x_1-2x_2 \end{pmatrix} = cK\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

tedy K má vlastnost (2): $K(cx) = cK(x)$ pro $\forall x \in R^2, \forall c \in R$

<u>vlastnost (1)</u>, tj. chceme ukázat, že platí $K(x+y) = K(x) + K(y)$ pro $\forall\, x, y \in R^2$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$K\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = K\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1) + (x_2+y_2) \\ (x_1+y_1) - (x_2+y_2) \\ 3(x_1+y_1) - 2(x_2+y_2) \end{pmatrix} \underset{\text{dle pravidel sčítání vektorů}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} (2x_1+x_2) + (2y_1+y_2) \\ (x_1-x_2) + (y_1-y_2) \\ (3x_1-2x_2) + (3y_1-2y_2) \end{pmatrix} \underset{\text{opět dle pravidel}}{=} \begin{pmatrix} 2x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \\ 3x_1-2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1+y_2 \\ y_1-y_2 \\ 3y_1-2y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= K\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$ což jsme měli ukázat.

Tedy, zobrazení K splňuje (1) i (2), $K: R^2 \to R^3$ je, dle definice, zobrazení lineární.

2. Buď $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ matice lineárního zobrazení $L: R_3 \to R_3$.

i) Najděte $L((1,-1,2))$.
ii) Určete vektor (x_1, x_2, x_3) tak, aby $L((x_1, x_2, x_3)) = (1, 2, 5)$.

Použijeme opět tvrzení z příkladu 1):
Zobrazení $L: R^n \to R^m$ je lineární, právě když $L(x) = A \cdot x$, $x \in R^n$
a A je matice typu (m, n) (matice A obecně závisí na volbě báze v prostorech R^n a R^m, u „nás" uvažujeme v R^n i v R^m kanonické báze).
Matice A se zpravidla nazývá matice zobrazení L.
V našem příkladu (opět píšeme vektory „sloupcově") je tedy

$$L(x) = L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{pro každý vektor } x \in R^3,$$

a pak

(i) $$L\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

(ii) máme-li najít vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pro který je $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,

tak vlastně řešíme soustavu lineárních rovnic s maticí A a pravou stranou, danou vektorem $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$;

řešení soustavy: můžeme řešit soustavu Gaussovou eliminační metodou, nebo, zjistíme-li, že matice A je regulární, můžeme pokračovat Gauss-Jordanovou metodou, nebo, v případě, že A je regulární matice, lze řešit soustavu rovnic užitím inverzní matice A^{-1}:

$$Ax = y \iff x = A^{-1}y,$$

pak bychom měli vzor při zobrazení L pro každý vektor $y \in R^3$, tedy A^{-1} „definuje" inverzní zobrazení k zobrazení L.

Řešení soustavy $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$:

a) Gaussova eliminace:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) (*) \quad \left(\begin{array}{l} 1.ř. - 2 \times 2.ř. \text{ a změna pořadí } 1. \text{ a } 2.ř. \\ 3.ř. - 2 \times 2.ř. \end{array}\right)$$

a máme soustava

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_2 + x_3 &= -3 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{a odtud} \qquad \begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_2 &= 4 \\ x_1 &= -1, \end{aligned}$$

tedy hledaný vektor je $\underline{x = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

(„zkouška správnosti": $L\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ cbd.)

b) můžeme pokračovat dále v upravené matici (*) (Gauss-Jordan)

$$(*) \underset{\substack{1.ř. + 2.ř. \\ \text{a } 2.ř. \cdot (-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{2.ř. + 3.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

a tedy opět máme řešení $\underline{x = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

c) Matice A je regulární, tedy má inverzní matici A^{-1} – vypočtěme:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right), \text{ tedy } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ a pak } \underline{x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(při výpočtu A^{-1} jsme užili stejné úpravy jako v části a) a b)).

3. Nechť L je lineární zobrazení, $L : R^3 \to R^3$, pro které platí:

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

a) Najděte $L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ pro libovolný vektor $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in R^3$ a matici tohoto zobrazení.

b) Ukažte, že k zobrazení L z části a) existuje inverzní zobrazení a toto inverzní zobrazeni najděte. Můžete zde užít inverzní matici k matici zobrazení L?

---

a) Je-li $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in R^3$, pak $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

((x_1, x_2, x_3) jsou souřadnice vektoru x vzhledem ke kanonické bázi $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$, $\vec{e_3} = (0,0,1)$)).

Pak, je-li $L : R^3 \to R^3$ lineární zobrazení, je (díky vlastnostem (1),(2))

$$L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = L\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = x_1 L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3 L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + x_2\\ -x_1 - x_2 + x_3\\ -x_2 - 2x_3\end{pmatrix},$$ tedy

$$\underline{L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}};$$

matici zobrazení L tedy „dostaneme" tak, že obrazy vektorů báze $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ „napíšeme" jako sloupce matice (ve stejném pořadí).
Je vidět, že toto platí i obecně pro lineární zobrazení $L : R^n \to R^m$, jsou-li dány obrazy báze v R^n (pro jednoduchost uvažujme v R^n i v R^m báze kanonické)

b) K zobrazení $L: R^3 \to R^3$ existuje inverzní zobrazení, když platí: pro každé $y \in R^3$ existuje jediné $x \in R^3$ tak, že $L(x) = y$, tj. $Ax = y$ (A je matice lineárního zobrazení L).

(zapsáno „symbolicky": $\forall y \in R^3 \exists! x \in R^3 : Ax = y$ $(L(x) = y)$)

a toto platí pro lineární zobrazení $L(x) = Ax$ právě když matice A je regulární (viz jsme připomněli v minulém příkladu): pak $Ax = y \Leftrightarrow x = A^{-1}y$,

tedy, inverzní zobrazení k lineárnímu zobrazení je opět lineární, a matice inverzního zobrazení L^{-1} je inverzní matice A^{-1}.

(Platí obecně pro lineární zobrazení $L: R^n \to R^n$)

Ukažme tedy pro matici zobrazení v našem příkladu (matici zobrazení L označme A):

(i) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$ A je matice regulární

a tedy existuje inverzní zobrazení k zobrazení L, $L^{-1}: R^3 \to R^3$.

(ii) výpočet inverzní matice A^{-1}, tj. matice inverzního zobrazení:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2.ř.+1.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{2.ř. \leftrightarrow 3.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{2.ř. - 2\times 3.ř.}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \text{ tedy, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a inverzní zobrazení je dáno ($L^{-1}: R^3 \to R^3$ lineární)

$$\underline{L^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}},$$

4. („dobrovolně")

Je dána matice
$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Označme L lineární zobrazení R_5 do R_3, jehož maticí je matice A.

(i) Je zobrazení L zobrazení R_5 na R_3 ?

(ii) Je zobrazení L prosté?

(iii) Najděte všechny vektory z R_5, jejich obrazem je nulový vektor.
Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor R_5 dimenze 2.

(i) $L : R^5 \to R^3$ je zobrazení „na" R^3, pokud pro každý vektor $y \in R^3$ existuje vektor $x \in R^5$ tak, že $L(x) = y$, tedy, při vyjádření L pomocí matice A, zda soustava rovnic

$$(*) \qquad Ax = y$$

má řešení pro každý vektor $y \in R^3$, což platí, pokud $h(A) = 3$.

(ii) Zobrazení $L : R^5 \to R^3$ není prosté – je-li $h(A) \leqq 3$, pak při řešení soustavy pro $y \in \mathcal{I}m(L)$ volíme $5 - h(A)$ parametrů, tedy zde aspoň dva parametry, tedy vzorů pro $y \in \mathcal{I}m(L)$ bude nekonečně mnoho.

(iii) Množina vzorů nulového vektoru, tj. $\mathcal{K}(L)$ ($\vec{o} \in \mathcal{I}m(L)$ vždy) je vektorový prostor, dimenze $\mathcal{K}(L)$ je dána počtem LNZ řešení homogenní rovnice $Ax = 0$, bude-li $h(A) = 3$, pak $\dim \mathcal{K}(L) = 2$ (při $h(A) = 3$ volíme 2 parametry, množina $\mathcal{K}(L)$ bude množina lineárních kombinací dvou LNZ řešení).

Nyní (i), (ii) i (iii) vyřešíme (na další stránce)

(i) Řešíme soustavu $A\cdot x = y$, $y \in R^3$, vyšetříme, kdy je $y \in \mathrm{Im}(L)$, tj. kdy má soustava $Ax = y$ řešení:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 & y_1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 2 & y_2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & y_3 \end{array}\right) \overset{2.ř. + 2\times 1.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 & y_1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & y_2 + 2y_1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & y_3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 2y_1 + y_2 - 2y_3 \end{array}\right);$$

a vidíme, že $h(A) = 3$, tedy soustava $Ax = y$ má řešení pro každé $y \in R^3$, tj. $\mathrm{Im}(L) = R^3$ a zobrazení L je zobrazení R^5 <u>na</u> R^3.

(ii) Zobrazení L není prosté.

(iii) Nalezení $\mathrm{Ker}(L)$, tj. všech vzorů nulového vektoru z R^3, neboli řešení soustavy (homogenní) $Ax = 0$:

Použijeme výpočet z (i) pro $(y_1, y_2, y_3) = (0,0,0)$, pak dostaneme pro řešení $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ -2x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

a ještě „lepší"

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 \qquad + 2x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

zvolme $x_4 = t$, $x_5 = s$, pak $x_2 = -2t + s$, $x_3 = \frac{3}{2}t - s$, $t, s \in R$

$x_1 = 2(-2t+s) + \frac{3}{2}t - s + t - s = -\frac{3}{2}t$

LNZ vektory

tedy $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\tilde{t} \\ -4\tilde{t} + s \\ 3\tilde{t} - s \\ 2\tilde{t} \\ s \end{pmatrix} = \tilde{t}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, tedy $\mathrm{Ker}(L)$ je

(zvolíme $\tilde{t} = \frac{t}{2}$)

podprostor R^5, dimenze 2 (je to lineární obal dvou lineárně nezávislých vektorů z R^5.

5. Je dána matice $$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Vysvětlete, co znamená, že $\lambda \in C$ je vlastní číslo matice M a $\vec{v}$ je vlastní vektor, příslušný tomuto vlastnímu číslu λ.
b) Ukažte, že číslo $\lambda = -1$ je vlastní číslo matice M.
c) Najděte všechny vlastní vektory, příslušné vlastnímu číslu $\lambda = -1$. Ověřte správnost výpočtu.

---

a) Je-li M čtvercová matice, pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice M a $\vec{v}$ je vlastní vektor, příslušný vlastnímu číslu λ, když $\vec{v} \neq \vec{o}$ a platí $$M . v = \lambda v .$$

Jinak napsáno, soustava lineárních rovnic (I - jednotková matice)

$$(1) \qquad (M - \lambda I)\, v = 0$$

má nenulové řešení, což je právě když $M - \lambda I$ je singulární, tj.

$$(2) \qquad \det(M - \lambda I) = 0$$

Tedy, $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice M, když je řešením rovnice (2), a vlastní vektory, příslušné vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$ najdeme řešením soustavy (1).

b) Máme-li ukázat, že $\lambda = -1$ je vlastní číslo matice M, stačí ukázat, že $\det(M - (-1)I) = 0$, tj. že $\det(M + I) = 0$, tedy zde:

$$\det(M+I) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 . \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ , tedy,}$$

(rozvoj dle 3. řádku)

$\lambda = -1$ je vlastní číslo matice M.

c) nalezení vlastních vektorů, příslušných vlastnímu číslu $\lambda=-1$:
$\vec{v}$ je vlastní vektor matice M, příslušný vlastnímu číslu $\lambda=-1$, když je řešením (nenulovým) soustavy lineárních rovnic

$$(M+I)\,v = 0\,,$$

tj. řešením soustavy ($\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

řešme Gaussovou eliminací:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ je řešením soustavy

$$\begin{aligned} v_1 \qquad\quad &= 0 \\ 2v_2 + v_3 &= 0 \end{aligned}$$

zvolíme $v_2 = t \neq 0$, pak $v_3=-2t$ a dostáváme

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\quad t\neq 0,$$

jsou vlastní vektory matice M, příslušné vlastnímu číslu $\lambda=-1$.

<u>Ověření „správnosti" výpočtu</u>, tj. ověření, že platí $M.v=-v$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1).\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

což jsme měli ukázat ∇

6. („dobrovolně")

Je dána matice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ukažte, že $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ jsou vlastní čísla matice A.

b) Najděte vlastní vektory, příslušné těmto vlastním číslům.

c) Sestavíte-li čtvercovou matici V , jejíž sloupce jsou vlastní vektory z části b), příslušné po řadě tomuto vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ukažte, že platí

$$V^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

---

a) To, že $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$ jsou vlastní čísla matice A, můžeme ověřit stejně jako v příkladu předchozím, nebo můžeme řešit rovnici $|A - \lambda I| = 0$ a ukázat tak, že má řešení, daná v a) (rovnice $|A - \lambda I| = 0$ je algebraická rovnice 3. stupně)

Ukažme si obě dvě „cesty":

$\underline{\lambda_1 = -1}$: $\det(A + I) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - (0 + 0 + 2) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$ je vlastní číslo matice A ;

$\underline{\lambda_2 = 2}$: $\det(A - 2I) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (úpravy – $1.ř. + 3.ř.$ a $2.ř. + 3.ř.$)

$\Rightarrow \lambda_2 = 2$ je vlastní číslo matice A ;

$\lambda_3 = -2$: $\det(A + 2I) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (determinant má stejné 2 řádky)

$\Rightarrow \lambda_3 = -2$ je vlastní číslo matice A .

Zkusme „nalézt" vlastní čísla matice A i řešením rovnice

$$\det(A-\lambda I)=0 \; :$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda, & 1, & 1 \\ 1, & -1-\lambda, & 1 \\ 1, & 1, & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\text{rozvineme dle 1. řádku})$$

$$= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda, & 1 \\ 1, & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & -1-\lambda \\ 1, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+\lambda)\left(-(1+\lambda)(1-\lambda)-1\right) - (1-\lambda-1) + \left(1-(-1-\lambda)\right) =$$

$$= (1+\lambda)(1-\lambda^2+1) + \lambda + 2+\lambda = (1+\lambda)(2-\lambda^2) + 2(1+\lambda) =$$

$$= (1+\lambda)(4-\lambda^2)$$

Tedy rovnice $|A-\lambda I|=0$ je rovnice

$(1+\lambda)(4-\lambda^2)=0$, a řešení jsou $\underline{\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-2}$.

(což jsme chtěli ukázat).

b) Výpočet vlastních vektorů, příslušných vlastním číslům matice A :

(i) $\lambda_1=-1$: vlastní vektor $\vec{v}$ je řešením soustavy $(A+I)v=0$:

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tedy}$$

$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ je řešením soustavy

$$\begin{aligned} v_1 \quad + v_3 &= 0 \\ v_2 + v_3 &= 0 \end{aligned}$$

zvolíme-li $v_1=t\,(\neq 0)$, pak $v_2=+t$, $v_3=-t$ a $\underline{v = t\begin{pmatrix} 1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t\neq 0}$

a ověření, tj. $A.v = -v$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{cbd})$$

(ii) $\lambda_2 = 2$: vlastní vektor $\vec{w}$ je řešením soustavy $(A-2I)w = 0$, tj.

$$(A-2I) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tedy}$$

$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ je řešením soustavy

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 - w_3 &= 0 \\ 2w_2 - w_3 &= 0 \end{aligned}$$

zvolíme-li $w_2 = t (\neq 0)$, pak $w_3 = 2t$, $w_1 = -t + 2t = t$, tedy $w = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0$

a „zkouška": $Aw = +2w$? :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{cbd})$$

(iii) $\lambda_3 = -2$: vlastní vektor $\vec{u}$ je řešením soustavy $(A+2I)u = 0$, tj.

$$(A+2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tedy}$$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je řešením soustavy

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{aligned}$$

zvolíme-li $u_1 = t$, pak $u_2 = -t$, $(t \neq 0)$

tedy $u = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$

a „zkouška": $Au = -2u$?:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ +2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(cbd.)}$$

c) Sestavíme matici V, jejíž sloupce jsou (po řadě) vlastní vektory, příslušné $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$ (volíme vždy $t = 1$):

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

V je matice regulární, tedy existuje V^{-1}
a navíc, ukazuje se, že vlastní vektory $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ jsou LNZ, tedy tvoří bázi prostoru R^3.

Inverzní matici V^{-1} zde uvedu bez výpočtu (zkuste si spočítat):

$$V^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a pak platí}$$

$$V^{-1} \cdot A \cdot V = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix},$$

tedy $$V^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \right) !$$

Jak tomuto výsledku máme rozumět?

Matice A je matice lineárního zobrazení $L: R^3 \to R^3$, je-li v R^3 báze kanonická. Pak, matice $V^{-1}.A.V$ je matice téhož zobrazení $L: R^3 \to R^3$, když „zvolíme" v R^3 bázi, tvořenou vlastními vektory $\vec{v}_1$, $\vec{w}$, $\vec{u}$, které jsou, jak jsme viděli, lineárně nezávislé, tj. zobrazení pak má „nejjednodušší" matici:

$$L\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\tilde{x}_1\\ \lambda_2\tilde{x}_2\\ \lambda_3\tilde{x}_3\end{pmatrix}$$

($(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ jsou souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k bázi, tvořené vlastními vektory matice A.)

Ukážeme si to: Je-li V matice se sloupci v, w, u (vektory báze), pak

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = V\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{pmatrix} = V^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Pak, když $L(x) = y$, tj. $Ax = y$ ($x = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ a $y = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$ jsou souřadnice vzhledem ke kanonické bázi)

pak tedy $A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$ a užitím $(*)$ dostaneme

$$A.V\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{pmatrix} = V\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\\ \tilde{y}_3\end{pmatrix}, \quad \text{tedy} \quad (\,|V^{-1}.\,)$$

$$V^{-1}AV\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\\ \tilde{y}_3\end{pmatrix}, \quad \text{což jsme chtěli ukázat.}$$

(matice $V^{-1}.A.V$ je matice zobrazení L v „bázi vlastních vektorů").

A ještě výpočet V^{-1}: (Gauss-Jordan)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{3.ř. + 1.ř.}{\overset{2.ř. - 1.ř.}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2\times 3.ř. + 2.ř.}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{6\times 1.ř. - 2.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 6 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{1.ř. + 3\times 3.ř.}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{V^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}}$$

Zkouška:

$$V \cdot V^{-1} = V^{-1} \cdot V = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I$$

(Poznámka: det $V = 6$, proto to „vychází" takto, zkuste i V^{-1} pomocí determinantu a adjungované matice)